3. $u_n = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^n \ln x\,dx$ $\begin{bmatrix} u'(x) = x^n \Leftarrow u(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \\ v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x} \end{bmatrix}$ donc : $u_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{n+1}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^n dx$

$= -\frac{\ln\frac{1}{2}}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ *car* $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ alors :

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 0$

4. $\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ on a : $f(1) \le f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right)$ (car f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$) $\Leftrightarrow \forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right]\ on\ a : 1 \le \frac{\ln x}{x-1} \le \frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right] on\ a : x^{n+1} \le \frac{x^{n+1}\ln x}{x-1} \le 2\ln 2.x^{n+1}$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right] on\ a : x^{n+1} \le \frac{x^{n+1}\ln x}{x-1} \le 2\ln 2.x^{n+1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n+1}\,dx \le \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^{n+1}\ln x}{x-1}dx \le 2\ln 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n+1}\,dx$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : \left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \le \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n+1}f(x)dx \le 2\ln 2\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : \frac{1}{n+2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right] \le \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n+1}f(x)dx \le \frac{2\ln 2}{n+2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right]$ de plus $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 0$

Donc, d'après un théorème de limite et ordre, on a : $\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n+1}f(x)dx = 0$

6. $\forall n \in \mathbb{N}; on\ a : \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = -\sum_{k=0}^{k=n} u_k - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n+1}f(x)dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = -\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n} u_k - \lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n+1}f(x)dx$ ainsi

$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{k=n} -u_k\right] = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$

<u>Exercice N°13:</u> A- 1.a) $g : x \mapsto \left[\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right]x^2 - \ln(1+x) + x$ est dérivable sur IR_+ (on remarque que la variable de g est x).Ainsi g est continue sur [0,h] et dérivable sur]0,h[. $\overset{TAF}{\Rightarrow}$ il existe un réel $c \in]0,h[tel\ que : g'(c) = \frac{g(h)-g(0)}{h-0}$ or g(h) = 0 et g(0) = 0 d'où g'(c) = 0 $\Leftrightarrow \left[\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right]2c - \frac{1}{1+c} + 1 = 0$ $\left(car\ g(x) = \left[\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right]2x - \frac{1}{x+1} + 1\right)$ donc

$g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(1+h)-h}{h^2} = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{1+c}-1\right) \Leftrightarrow \frac{\ln(1+h)-h}{h^2} = \frac{-1}{2(1+c)}$.

b) $0 < c < h \Leftrightarrow 1 < c+1 < 1+h \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{1+c} > \frac{1}{1+h} \Leftrightarrow \frac{-1}{2(1+h)} < \frac{-1}{2(c+1)} > \frac{1}{2}$ or $\lim_{h\to0^+}\frac{-1}{2(1+h)} = -\frac{1}{2}$ alors

$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} = -\frac{1}{2}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...